Instituto de Física - UFF
Mecânica Analítica - 1^oP/2012 - Prof. Daniel Jonathan
Lista de Exercícios 4 - teste na quinta, 10/05

0. Estude o exemplo resolvido na seção 4.7 do livro (moeda rolando numa superfície inclinada), não se esquecendo de preencher os passos faltantes (exercícios 4.7.1 e 4.7.2). Compare o exemplo com o exercício 5 da lista 2 (moeda rolando numa supefície plana), notando onde aparecem as diferenças na Lagrangiana, nas eqs. de movimento, e nas soluções. Qual deve ser o tamanho mínimo do plano na direção y a fig. 4.7 para que a moeda possa executar um movimento ilimitado na direção x?

1. Uma nave espacial que possui um eixo de simetria $\hat{e}_3$ move-se no espaço com velocidade constante. Motores simetricamente situados aplicam um torque constante N_3.

   (a) Supondo que $\omega_3(0) = 0$, determine $\omega_3(t)$.

   (b) Prove que $\omega_1^2 + \omega_2^2$ é uma constante de movimento.

   (c) Tomando as condições iniciais $\omega_1(0) = 0$ e $\omega_2(0) = \Omega$, determine $\omega_1(t) = 0$ e $\omega_2(t)$.

   (d) Descreva o movimento executado pelo vetor velocidade angular relativamente aos eixos principais de inércia.

2. Uma porta homogênea de massa m, largura l, altura h e espessura desprezível se fecha com velocidade angular ω constante.

   (a) Escolhendo o eixo $z = x_3$ coincidente com o eixo (vertical) de rotação, e colocando a origem no ponto P na base desse eixo, encontre as componentes do vetor momento angular com respeito a P e na base dos eixos $x_{1,2,3}$ fixos na porta.

   Sugestão: calcule primeiro a matriz de inércia com respeito ao CM na base dos eixos $x_{1,2,3}$, usando argumentos de simetria para simplificar. Depois use o teorema dos eixos paralelos.

   (b) Determine o vetor torque relativo ao ponto P.

   Sugestão: transforme primeiro o resultado do item (i) para eixos fixos num sistema inercial

3. Um automóvel parte do repouso com aceleração constante a e uma porta totalmente aberta, fazendo um ângulo de $90°$ com o corpo do veículo.

   a) Tratando a porta como um retângulo de altura h e largura l, mostre que o tempo decorrido até ela se fechar é dado por

$$t = \sqrt{\frac{l}{3a}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}.$$

   Sugestão: (i) O referencial do carro é equivalente a um referencial inercial com aceleração 'gravitacional' fictícia no sentido oposto ao do movimento. (ii) use o tensor de inércia obtido no exercício anterior.

   b) Se $l = 1,2m$ e $a = 0,3m/s^2$, mostre que $t \simeq 3s$

   Sugestão: a integral não pode ser expressa por funções elementares (é uma 'integral elíptica'). Obtenha seu valor numérico numa tabela ou usando um pacote computacional ou webapp. Por exemplo: www.WolframAlpha.com.

4. Um pião simétrico com um ponto fixo entra em movimento com as seguintes condições iniciais:
   $\theta = 60°,\ \dot{\theta} = 0,\ \dot{\phi} = 2\sqrt{\frac{mgl}{3I_1}},\ \dot{\psi} = (3I_1 - I_3)\sqrt{\frac{mgl}{3I_1 I_3^2}}$.

   (a) Mostre que $p_\phi = p_\psi$, obtendo seu valor, e determine ainda a função $V_{ef}(\theta)$. Esboce um gráfico de $V_{ef}(\theta)$ para $0 \leq \theta \leq \pi$.

   (b) Calcule o(s) pontos(s) onde a energia cinética E' se anula, e também aquele(s) onde a derivada $V'_{ef}(\theta)$ se anula. Faça uma análise qualitativa do movimento de nutação a partir das condições iniciais acima.

   Sugestão: analise com cuidado o que ocorre em $\theta = 0$.

   c) Mostre que a equação (4.9.9) pode ser colocada na forma

$$\dot{u}^2 = \frac{mgl}{I_1}(1-u)^2(2u-1),$$

onde $u = \cos\theta$. Verifique que a solução para $\theta(t)$ com as condições iniciais acima é

$$\sec\theta = 1 + \operatorname{sech}\left[\sqrt{\frac{mgl}{I_1}}t\right].$$

d) Discuta se o comportamento descrito por essa solução está de acordo com a análise qualitativa do item (b). Esse comportamento é razoável, do ponto de vista físico? O que deve acontecer se as condições iniciais forem infinitesimalmente diferentes?

e) Discuta ainda o comportamento de $\dot{\phi}$ e $\dot{\psi}$, comparando com os resultados gerais obtidos no texto para o caso $|p_\phi/p_\psi| \neq 1$.

5. Uma partícula move-se sem atrito na parte interna côncava de uma superfície de revolução $z = f(\rho)$, onde ρ, θ, z são coordenadas cilíndricas, e na presença de um campo gravitacional constante $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$.

   (a) Encontre a condição para que exista uma órbita circular de raio ρ_0.

   (b) Mostre que uma órbita circular é estável ou instável conforme $3f'(\rho_0) + \rho_0 f''(\rho_0)$ seja positivo ou negativo.

   (c) Para as órbitas estáveis, encontre a freqüência Ω das pequenas oscilações em torno da configuração de equilíbrio.

6. Uma *armadilha de íons* é um equipamento usado para capturar e manipular um pequeno número de íons (átomos carregados). Campos eletromagnéticos especialmente projetados criam um potencial efetivo com um mínimo local num ponto fixo do espaço. Ao redor deste ponto o potencial se comporta (para pequenas oscilações) como um oscilador harmônico tridimensional; $V(\vec{r}) \simeq \frac{1}{2}\left(k_x x^2 + k_y y^2 + k_z z^2\right)$. Em particular, nas chamadas 'armadilhas lineares', as constantes satisfazem $k_y, k_z \gg k_x$. Nesse caso, para energias suficientemente baixas, os íons só podem se deslocar apreciavelmente ao longo do eixo x, e podemos aproximar o movimento como sendo 1-dimensional. Quando há apenas um íon na armadilha, o seu movimento é portanto harmônico simples ao redor da origem, com $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Dois ou mais íons idênticos, porém, se repelem mutuamente com o potencial Coulombiano $V_{ij} = \frac{A}{|x_i - x_j|}$, onde $A = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}$. Nesse caso o sistema tem um ponto de equilíbrio onde a repulsão entre os íons é compensada pelo potencial externo.

   a) Considerando uma armadilha linear contendo $N = 2$ íons idênticos, calcule as suas posições de equilíbrio.

   b) Calcule as matrizes $\hat{T}$ e $\hat{V}$ para as pequenas oscilações deste sistema, sendo as coordenadas η_j dadas pelos deslocamentos de cada íon com respeito ao seu ponto de equilíbrio.

   c) Encontre as frequências características e os modos normais de vibração. Represente graficamente os modos normais. Calcule o valor das frequências, e das posições de equilíbrio, no caso de íons de Cálcio 40 (carga $+e$, massa $6.64 \times 10^{-23} g$), e um potencial externo com $\omega_{ext} \equiv \sqrt{k/m} = 2\pi \times 10^5 rad/s$ (valor típico para armadilhas reais).

   d) [extra - desafio]: Refaça os itens acima para o caso $N = 3$. Dicas: (i) use a simetria do potencial para simplificar as deduções. (ii) Os dois modos do caso $N = 2$ se generalizam de forma bastante direta, e o terceiro modo é ortogonal aos primeiros dois.

   Sugestão: a solução completa, analítica até $N = 3$ e numérica até $N = 10$, pode ser encontrada em: Applied Physics B, vol.66 p.181 (1998), URL: http://tinyurl.com/7ldx96e. Preprint disponível em: http://arxiv.org/abs/quant-ph/9702053. Obs: o artigo estuda também diversos aspectos da versão quântica desse sistema.

7. Um aro circular fino de massa m e raio R oscila num plano vertical com um ponto fixo O (ver figura). Ao longo do aro desliza sem atrito uma conta com a mesma massa m.

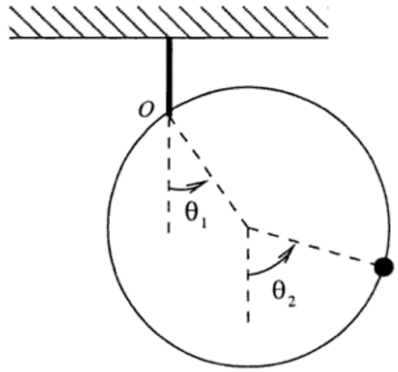
   (a) Mostre que a lagrangiana do sistema é

   $$L = \frac{3mR^2}{2}\dot{\theta}_1^2 + \frac{mR^2}{2}\dot{\theta}_2^2 + mR^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + mgR(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

   (b) Considerando pequenas oscilações, encontre as frequências características e os modos normais de vibração. Represente graficamente os modos normais.

   (c) Obtenha a solução das equações de movimento com condições iniciais $\theta_1(0) = 0, \theta_2(0) = \theta_0, \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$

   (d) Determine a matriz modal e as coordenadas normais do sistema.



8. A lagrangiana

$$L = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \dot{\eta_l}^2 - \frac{k}{2} \sum_{l=0}^{N-1} (\eta_{l+1} - \eta_l)^2$$

descreve uma cadeia linear de $N-1$ osciladores de mesma massa m, conectados por molas iguais com constante de força k. Os extremos da cadeia são fixos, isto é, $\eta_0 = 0 = \eta_N$.

(a) Encontre as equações de movimento para $\eta_1, \ldots, \eta_{N-1}$ e mostre que elas admitem os modos normais de vibração $\eta_l^{(s)}(t) = \rho_l^s \cos(\omega_s t + \phi_s)$, com

$$\rho_l^s = c^{(s)} \operatorname{sen} \frac{2\pi s l}{N}; \quad s, l = 1, \ldots, N-1,$$

onde $c^{(s)}$ são constantes de normalização e as freqüências características são $\omega_s = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \operatorname{sen} \frac{s\pi}{N}$.

(b) Mostre que cada vetor $\rho^{(s)}$ é normalizado pela escolha $c^{(s)} = \sqrt{\frac{2}{Nm}}$, independente de s.

(c) Se no instante $t = 0$ só o primeiro oscilador estiver deslocado da sua posição de equilíbrio ($\eta_1 \neq 0$), e todos os osciladores estiverem em repouso, determine $\eta_l(t)$.

Sugestão: use o fato de que os vetores $\rho^{(s)}$ formam um conjunto ortonormal

Observação físico-cultural: generalizações tridimensionais de modelos como este são utilizadas para descrever o comportamento de estruturas cristalinas, formadas por átomos dispostos numa rede regular. A estrutura dos modos normais de vibração permite então compreender muitas das propriedades mecânicas, térmicas, etc desses materiais. Uma concordância quantitativa com o experimento requer ainda que se faça versões quânticas desses modelos, nas quais porém a estrutura clássica de modos normais continua sendo um ingrediente crucial. Do ponto de vista quântico, uma excitação fundamental de um modo normal de uma rede cristalina é chamada de *fônon*. O nome vem do fato de que essas excitações, que são responsáveis pela transmissão do *som* no material, se propagam de forma análoga a uma partícula, com muitas semelhança ao comportamento dos *fótons* (mas com velocidade bem menor, é claro).